Lineaire Algebra

1ste Bachelor
Industrieel Ingenieur

Editie
Versie 2021-2022
4 februari 2022.

Uitgever
Willem Waegeman, An Schelfaut, Elien Van de Walle en Demir Ali Köse
Vakgroep Data Analyse en Wiskundige Modellering
Universiteit Gent
Coupure links 653
9000 Gent
België

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 5
Deelruimten van $\mathbb{R}^m$

In dit theoretisch hoofdstuk worden een aantal concepten geïntroduceerd die in de volgende hoofdstukken toepassingen zullen kennen. We starten met een formele definitie van een deelruimte van $\mathbb{R}^m$, gevolgd door de begrippen basis en dimensie. We illustreren deze begrippen op een belangrijke deelruimte: de nulruimte van een matrix. We sluiten dit hoofdstuk af met een discussie over coördinatensystemen en basisverandering.

Sectie 5.1 Deelruimten van $\mathbb{R}^m$

Doorgaans starten we met een formele definitie wanneer we een nieuw begrip onder handen nemen.

Definitie 5.1 Deelruimte

Veronderstel dat W een deelverzameling is van $\mathbb{R}^m$. Dan is W een **deelruimte** van $\mathbb{R}^m$ als de volgende drie voorwaarden gelden

1. $\vec{\mathbf{0}} \in W$.
2. Als $\vec{x} \in W$ en $\vec{y} \in W$, dan $\vec{x} + \vec{y} \in W$.
3. Als $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\vec{x} \in W$, dan $\alpha\vec{x} \in W$.

We zullen ontdekken dat we reeds bekend zijn met een breed gamma aan deelruimten uit voorgaande hoofdstukken. Laat ons een voorbeeld van een deelruimte bekijken.

Voorbeeld 5.1
Beschouw de deelverzameling

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \, 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0 \right\}.$$

Het is duidelijk dat $W \subseteq \mathbb{R}^3$ omdat alle objecten in W kolomvectoren van grootte 3 zijn. Maar is W een deelruimte van $\mathbb{R}^3$? Voldoet het aan de drie eigenschappen uit Definitie 5.1? Dat is de vraag. Het spreekt voor zich dat de eerste voorwaarde voldaan is, want $\vec{\mathbf{0}} \in W$.

We proberen nu de tweede eigenschap te bewijzen. Veronderstel dat $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ en $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ vectoren zijn uit W. Dan weten we dat deze vectoren niet geheel willekeurig kunnen zijn. We weten bijvoorbeeld dat $\vec{x}$ moet voldoen aan $2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0$ terwijl $\vec{y}$ moet voldoen aan $2y_1 - 5y_2 + 7y_3 = 0$. Onze tweede eigenschap stelt de vraag of $\vec{x} + \vec{y} \in W$. Wanneer onze verzameling vectoren nog $\mathbb{R}^3$ was, was deze vraag snel beantwoord. Nu is ze minder duidelijk. Bemerk eerst dat

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix} .$$

We kunnen het lidmaatschap tot W controleren via

$$\begin{aligned} 2(x_1 + y_1) - 5(x_2 + y_2) + 7(x_3 + y_3) &= 2x_1 + 2y_1 - 5x_2 - 5y_2 + 7x_3 + 7y_3 \\ &= (2x_1 - 5x_2 + 7x_3) + (2y_1 - 5y_2 + 7y_3) \\ &= 0 + 0 && \vec{x} \in W,\ \vec{y} \in W \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

en via deze berekening zien we dat $\vec{x} + \vec{y} \in W$. Eén extra eigenschap klaar, nog één te gaan.

Als α een scalair is en $\vec{x} \in W$, geldt er dan altijd dat $\alpha\vec{x} \in W$? Dit is wat we dienen te bewijzen voor de derde voorwaarde. We bekijken de vector

$$\alpha\vec{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix} .$$

We kunnen testen of deze vector tot W behoort met de formule

$$\begin{aligned} 2(\alpha x_1) - 5(\alpha x_2) + 7(\alpha x_3) &= \alpha(2x_1 - 5x_2 + 7x_3) \\ &= \alpha 0 && \vec{x} \in W \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

We zien zo dat er inderdaad geldt dat $\alpha\vec{x} \in W$, voor elke combinatie van vector en scalair. Bijgevolg concluderen we dat W een deelruimte is van $\mathbb{R}^3$. ⊠

Het kan nuttig zijn om enkele deelverzamelingen te beschouwen die *geen* deelruimte zijn. Een deelverzameling is geen deelruimte als minstens één van de drie voorwaarden niet voldaan is. In eender welk interessant voorbeeld zal dit alvast niet de eerste voorwaarde zijn. Het is voldoende dat een voorwaarde niet geldt voor één vector of koppel vectoren.

Voorbeeld 5.2

Beschouw de deelverzameling W als een kandidaat-deelruimte van $\mathbb{R}^2$.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \, 3x_1 - 5x_2 = 12 \right\}$$

De nulvector van $\mathbb{R}^2$, $\vec{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, zal niet de nulvector in W zijn, want $\vec{\mathbf{0}} \notin W$ aangezien $3(0) - 5(0) = 0 \neq 12$. Dus W heeft geen nulvector, waardoor de eerste voorwaarde uit Definitie 5.1 niet voldaan is. Deze deelverzameling is eveneens niet gesloten onder de optelling en scalaire vermenigvuldiging. Kun je hier voorbeelden van vinden? ⊠

Voorbeeld 5.3

Beschouw de deelverzameling X als een kandidaat-deelruimte van $\mathbb{R}^2$.

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \, x_1 x_2 = 0 \right\}$$

Je kan controleren dat $\vec{\mathbf{0}} \in X$. We beschouwen $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in X$ en $\vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in X$. Toch geldt er dat

$$\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin X$$

Dus voldoet X niet aan de tweede voorwaarde uit Definitie 5.1 en is daardoor geen deelruimte. ⊠

Voorbeeld 5.4
Beschouw de deelverzameling Y als kandidaat-deelruimte van $\mathbb{R}^2$.

$$Y = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \, x_1 \in \mathbb{Z}, \, x_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

We laten enkel gehele getallen toe als elementen in onze vectoren. Nu geldt dat $\vec{\mathbf{0}} \in Y$ en dat de verzameling gesloten is onder de optelling (verifieer dit zelf). We beschouwen $\alpha = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ en $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in Y$, echter

$$\alpha \vec{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \notin Y \, .$$

Dus de derde voorwaarde van Definitie 5.1 geldt niet voor Y. Dit is bijgevolg geen deelruimte. ⊠

Er zijn twee voorbeelden van triviale deelruimten. Via Definitie 5.1 komt $\mathbb{R}^m$ in aanmerking om een deelruimte van zichzelf te zijn. De verzameling die enkel de nulvector bevat, $Z = \left\{ \vec{\mathbf{0}} \right\}$, is ook een deelruimte, wat we kunnen inzien door Definitie 5.1 toe te passen. Deze deelruimten zijn zo duidelijk (en daardoor niet al te interessant) dat we ernaar zullen verwijzen als triviale deelruimten. We sluiten deze sectie af met een minder triviale observatie.

Stelling 5.1 Opspannende verzamelingen zijn deelruimten

Stel dat $S = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ een verzameling is van vectoren in $\mathbb{R}^m$. Dan is $\operatorname{Span}(S)$ een deelruimte van $\mathbb{R}^m$.

Bewijs Span(S) bevat alle lineaire combinaties van $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$, met name alle vectoren $\vec{\boldsymbol{x}}$ van de vorm

$$\vec{\boldsymbol{x}} = c_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n \vec{\boldsymbol{v}}_n$$

met $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. De nulvector maakt natuurlijk deel uit van Span(S), met de keuze $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, dus de eerste voorwaarde is voldaan. Om de tweede voorwaarde na te gaan, beschouw $\vec{\boldsymbol{x}}$ en een tweede vector $\vec{\boldsymbol{y}}$ in Span(S):

$$\vec{\boldsymbol{y}} = c_1' \vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2' \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n' \vec{\boldsymbol{v}}_n$$

met $c_1', \ldots, c_n' \in \mathbb{R}$. Dan is de som van $\vec{\boldsymbol{x}}$ en $\vec{\boldsymbol{y}}$ eveneens in Span(S), omdat

$$\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} = (c_1 + c_1')\vec{\boldsymbol{v}}_1 + (c_2 + c_2')\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + (c_n + c_n')\vec{\boldsymbol{v}}_n \, .$$

De derde voorwaarde wordt op een gelijkaardige manier aangetoond. Beschouw opnieuw een willekeurige $\vec{\boldsymbol{x}}$ in Span(S). Dan maakt

$$\alpha\vec{\boldsymbol{x}} = \alpha(c_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{v}}_n) = (\alpha c_1)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + (\alpha c_2)\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + (\alpha c_n)\vec{\boldsymbol{v}}_n$$

ook deel uit van Span(S) voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

Sectie 5.2 Basissen

Een basis van een vectorruimte is één van de meest waardevolle concepten in de lineaire algebra. Dikwijls zal deze een compacte, eindige beschrijving geven van een deelruimte. We beschikken nu over alle middelen om een basis van een deelruimte te definiëren.

Definitie 5.2 Basis

Veronderstel dat W een deelruimte is van $\mathbb{R}^m$. Dan is de verzameling $\left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_n\right\}$ van vectoren in W een **basis** voor W als $\left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_n\right\}$ lineair onafhankelijk is en W opspant.

Dus een basis is een lineair onafhankelijke opspannende verzameling voor een deelruimte. De benodigdheden opdat de verzameling de deelruimte W opspant, zorgen ervoor dat de verzameling voldoende “grondstoffen” bevat om W op te bouwen, terwijl de lineaire onafhankelijkheid verzekert dat we niet meer grondstoffen hebben dan we eigenlijk nodig hebben. Zoals we zullen zien in de volgende sectie, is een basis een minimale opspannende verzameling.

Voorbeelden van Basissen

Merk op dat Definitie 5.2 toelaat dat een deelruimte meerdere basissen heeft. Dit zal in werkelijkheid ook het geval zijn, zoals zal blijken uit de volgende voorbeelden. Meer algemeen kunnen we eender welke basis van een deelruimte nemen, elke basisvector vermenigvuldigen met een scalair verschillend van nul en een andere verzameling maken die nog altijd een basis zal zijn. Voor $\mathbb{R}^m$ zal het gemakkelijk zijn om een collectie aan “mooie” basissen te hebben. Wanneer een vectorruimte één bepaalde, goedgevormde basis heeft, wordt deze soms de **standaardbasis** genoemd.

Stelling 5.2 Standaard Eenheidsvectoren zijn een Basis

De verzameling van standaard eenheidsvectoren voor $\mathbb{R}^m$, $B = \{\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_m\} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_i | \, 1 \leq i \leq m\}$ is een basis voor de vectorruimte $\mathbb{R}^m$.

Bewijs We moeten aantonen dat de verzameling B zowel lineair onafhankelijk als een opspannende verzameling voor $\mathbb{R}^m$ is. Eerst en vooral zijn de vectoren van B de kolommen van de eenheidsmatrix I, waarvan we weten dat I inverteerbaar is (want I is rij-equivalent met de eenheidsmatrix). Bovendien zijn de kolommen van een inverteerbare matrix lineair onafhankelijk. Veronderstel dat we een willekeurige vector uit $\mathbb{R}^m$ nemen, stel

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Kunnen we $\vec{\boldsymbol{v}}$ schrijven als een lineaire combinatie van de vectoren in B? Ja, en wel vrij eenvoudig.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + v_m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\vec{\boldsymbol{v}} = v_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + v_2\vec{\boldsymbol{e}}_2 + v_3\vec{\boldsymbol{e}}_3 + \cdots + v_m\vec{\boldsymbol{e}}_m$$

Dit toont aan dat $\mathbb{R}^m \subseteq \operatorname{Span}(B)$, wat voldoende is om aan te tonen dat B een opspannende verzameling is voor $\mathbb{R}^m$. ■

De basissen hierboven beschreven zullen vaak de eenvoudigste zijn om mee te werken. Een basis hoeft echter niet altijd op het eerste zicht op een basis te lijken. We zullen weldra voorbeelden van die aard tegenkomen.

Vectoren elimineren

Als we een lineair afhankelijke verzameling gebruiken om een span te construeren, dan kunnen we *altijd* dezelfde oneindige verzameling opspannen uit een verzameling die één vector kleiner is in grootte. We zullen dit gedrag illustreren in Voorbeeld 5.5. Dit is echter niet mogelijk wanneer we een span opbouwen uit een lineair onafhankelijke verzameling. In zekere zin is het gebruiken van een lineair onafhankelijke verzameling om een span te construeren de best mogelijke manier — er zijn geen extra vectoren die gebruikt worden om alle nodige lineaire combinaties op te bouwen.

Stelling 5.3 Van Span tot Basis

Stel $S = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ en $H = \operatorname{Span}(\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\})$.

a. Wanneer $\vec{\boldsymbol{v}}_k \in S$ een lineaire combinatie is van de andere vectoren in S, dan spant $S \setminus \{\vec{\boldsymbol{v}}_k\}$ nog altijd H op.

b. Als $H \neq \left\{\vec{\mathbf{0}}\right\}$, dan bestaat er een deelverzameling van S die een basis is voor H.

Bewijs Om (a) te bewijzen starten we met het herordenen van de verzameling $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ zodat de laatste vector in de verzameling geschreven kan worden als een lineaire combinatie van de andere vectoren, i.e. $\vec{\boldsymbol{v}}_n$ wordt $\vec{\boldsymbol{v}}_k$ en vice versa. Bijgevolg kunnen we $\vec{\boldsymbol{v}}_n$ schrijven als

$$\vec{\boldsymbol{v}}_n = a_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \cdots + a_{n-1}\vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}\,.$$

Beschouw nu een willekeurige vector $\vec{\boldsymbol{x}} \in H = \operatorname{Span}(\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\})$. Voor deze vector geldt er dat

$$\vec{\boldsymbol{x}} \;=\; c_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \cdots + c_{n-1}\vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} + c_n\vec{\boldsymbol{v}}_n$$

$$
\begin{aligned}
&= c_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \cdots + c_{n-1}\vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} + c_n\left(a_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \cdots + a_{n-1}\vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}\right) \\
&= (c_1 + a_1c_n)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \cdots + (c_{n-1} + a_{n-1}c_n)\vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}\,.
\end{aligned}
$$

Dus, $H = \operatorname{Span}(\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}) = \operatorname{Span}(\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}\})$, want elke vector in H kan geschreven worden als een lineaire combinatie van de overige $n-1$ vectoren.

Om (b) te bewijzen passen we herhaaldelijk de procedure uit (a) toe. Op een gegeven punt zullen we een gereduceerde verzameling bekomen waarbij geen van de resterende vectoren een lineaire combinatie is van de anderen. Deze vectoren vormen dan een lineair onafhankelijke verzameling. Door (a) spant de gereduceerde verzameling ook de deelruimte op, dus moet ze een basis zijn voor de deelruimte. ■

Deze stelling kan gebruikt worden, soms herhaaldelijk, om een verzameling vectoren in een span terug te brengen tot een basis. In het volgende voorbeeld gaan we dieper in op de subtiliteiten.

Voorbeeld 5.5

Beschouw de verzameling R van vier vectoren uit $\mathbb{R}^5$,

$$
R = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1,\, \vec{\boldsymbol{v}}_2,\, \vec{\boldsymbol{v}}_3,\, \vec{\boldsymbol{v}}_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 6 \\ -11 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}
$$

en definieer $W = \operatorname{Span}(R)$. Om Stelling 2.7 toe te passen, stellen we de 5×4 coëfficiëntenmatrix A op:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & -11 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix},
$$

en rij-reduceren we de uitgebreide matrix van het homogene stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$:

$$
\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

We kunnen oneindig veel oplossingen vinden voor dit stelsel, waarvan de meeste niet-triviaal zijn:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -4x_4 \\
x_2 &= 0 \\
x_3 &= -x_4.
\end{aligned}
$$

We kunnen eender welke vector kiezen om een lineaire afhankelijkheid in R op te stellen. We beginnen met $x_4 = 1$ en vinden de oplossing

$$
\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

We kunnen dus het lineair verband

$$(-4)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + 0\vec{\boldsymbol{v}}_2 + (-1)\vec{\boldsymbol{v}}_3 + 1\vec{\boldsymbol{v}}_4 = \vec{\mathbf{0}}$$

neerschrijven. Stelling 5.3 garandeert dan dat we deze lineaire afhankelijkheid kunnen oplossen naar *een* vector van R, maar de keuze is volledig aan ons. Merk echter op dat $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ nul als coëfficiënt heeft. In dit geval kunnen we niet kiezen om op te lossen naar $\vec{\boldsymbol{v}}_2$. Misschien zou een ander lineair verband een niet-nul coëfficiënt bij $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ teweegbrengen als we enkel voor deze vector dienden op te lossen. Dit voorbeeld is echter zo opgebouwd dat het *altijd* een nul zal opleveren bij $\vec{\boldsymbol{v}}_2$, zoals je kan zien door het homogeen stelsel op te lossen. Elke oplossing heeft $x_2 = 0$.

Als we nu overtuigd zijn dat we niet kunnen oplossen naar $\vec{\boldsymbol{v}}_2$, dan kiezen we om op te lossen naar $\vec{\boldsymbol{v}}_3$,

$$\vec{\boldsymbol{v}}_3 = (-4)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + 0\vec{\boldsymbol{v}}_2 + 1\vec{\boldsymbol{v}}_4 = (-4)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + 1\vec{\boldsymbol{v}}_4\,.$$

We beweren nu dat deze specifieke vergelijking ons toelaat om te schrijven dat

$$W = \mathrm{Span}\,(R) = \mathrm{Span}\,(\{\vec{\boldsymbol{v}}_1,\, \vec{\boldsymbol{v}}_2,\, \vec{\boldsymbol{v}}_3,\, \vec{\boldsymbol{v}}_4\}) = \mathrm{Span}\,(\{\vec{\boldsymbol{v}}_1,\, \vec{\boldsymbol{v}}_2,\, \vec{\boldsymbol{v}}_4\})\ ,$$

waarbij $\vec{\boldsymbol{v}}_3$ in essentie overbodig wordt om W op te bouwen als span. Deze bewering is een gelijkheid van twee verzamelingen. Stel $R' = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1,\, \vec{\boldsymbol{v}}_2,\, \vec{\boldsymbol{v}}_4\}$ en $W' = \mathrm{Span}\,(R')$. We willen aantonen dat $W = W'$.

Toon eerst aan dat $W' \subseteq W$. Omdat elke vector van R' in R bevat is, kan elke vector die we kunnen construeren in W' als lineaire combinatie van R' ook geconstrueerd worden als vector in W door dezelfde lineaire combinatie van dezelfde vectoren in R. Dat was eenvoudig. Nu draaien we het om.

Vervolgens tonen we dat $W \subseteq W'$. Kies een $\vec{\boldsymbol{v}}$ uit W. Dan zijn er scalairen $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3,\, \alpha_4$ zodat

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{v}} &= \alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \alpha_3\vec{\boldsymbol{v}}_3 + \alpha_4\vec{\boldsymbol{v}}_4 \\
&= \alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \alpha_3\left((-4)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + 1\vec{\boldsymbol{v}}_4\right) + \alpha_4\vec{\boldsymbol{v}}_4 \\
&= \alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \left((-4\alpha_3)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_3\vec{\boldsymbol{v}}_4\right) + \alpha_4\vec{\boldsymbol{v}}_4 \\
&= \left(\alpha_1 - 4\alpha_3\right)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \left(\alpha_3 + \alpha_4\right)\vec{\boldsymbol{v}}_4.
\end{aligned}$$

Deze vergelijking zegt dat $\vec{\boldsymbol{v}}$ geschreven kan worden als lineaire combinatie van de vectoren in R' en zodoende zit deze vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ in W'. Dus $W \subseteq W'$ en we hebben vastgesteld dat $W = W'$.

Als R' ook lineair afhankelijk was, dan konden we de verzameling nog verder reduceren. R' is echter lineair onafhankelijk, dus vormt deze verzameling een basis voor de span. Merk op dat we ervoor konden kiezen om eender welke van $\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $\vec{\boldsymbol{v}}_3$ of $\vec{\boldsymbol{v}}_4$ te elimineren, maar schijnbaar is $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ essentieel voor de constructie van W, omdat $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ niet vervangen kan worden door een lineaire combinatie van $\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $\vec{\boldsymbol{v}}_3$ of $\vec{\boldsymbol{v}}_4$. ⊠

In Voorbeeld 5.5 maakten we gebruik van vier vectoren om een span te creëren. Startend van een lineair afhankelijke verzameling die uit vier vectoren bestond, waren we in staat om een vector te verwijderen, zonder dat dat gevolgen had voor de opspannende verzameling van die vectoren. We moesten wel zorgvuldig te werk gaan, zodat we de juiste verctor verwijderden. De volgende stelling stelt een gefundeerde methode voor om steeds de juiste vector te kiezen als we vectoren verwijderen uit een lineair afhankelijke verzameling.

Stelling 5.4 Basis van een Span

Stel dat $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$ een verzameling van kolomvectoren is. Definieer $W = \operatorname{Span}(S)$ en laat A de matrix zijn die de vectoren van S als kolommen heeft. Stel dat B de gereduceerde echelonvorm van A is, met $D = \{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_r\}$ de verzameling van indices die corresponderen met pivotkolommen in B. Dan geldt:

1. $T = \{\vec{v}_{d_1}, \vec{v}_{d_2}, \vec{v}_{d_3}, \ldots \vec{v}_{d_r}\}$ is een lineair onafhankelijke verzameling.
2. $W = \operatorname{Span}(T)$.

Bewijs Een formeel bewijs van de stelling valt buiten het bestek van deze cursus. ■

Nu volgt een directe toepassing van Stelling 5.4.

Voorbeeld 5.6

Start met een verzameling van vijf vectoren in $\mathbb{R}^4$,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\1\\-1\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\5\\1\end{bmatrix} \right\}$$

en stel $W = \operatorname{Span}(S)$. Om een kleinere lineair onafhankelijke verzameling te bekomen, volg de procedure die beschreven wordt in Stelling 5.4. Plaats de vectoren in S als kolommen in een matrix en rij-reduceer,

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 7 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -1 & -1 & 5\\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix}\boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Kolommen 1 en 3 zijn de pivotkolommen ($D = \{1, 3\}$) dus de verzameling

$$T = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-1\\1\end{bmatrix} \right\}$$

is linear onafhankelijk en $\operatorname{Span}(T) = \operatorname{Span}(S) = W$.

Omdat de gereduceerde echelonvorm van een matrix uniek is (Stelling 1.4), leidt de procedure in Stelling 5.4 tot een unieke verzameling T. Er zijn echter heel wat verzamelingen T die lineair onafhankelijk zijn en W opspannen. Zonder bewijs geven we twee andere mogelijkheden:

$$T' = \left\{ \begin{bmatrix}2\\2\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-1\\1\end{bmatrix} \right\}$$

$$T^* = \left\{ \begin{bmatrix}3\\1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\3\\0\end{bmatrix} \right\}$$

Kan je zelf bewijzen dat T' en T^* lineair onafhankelijk zijn en $W = \operatorname{Span}(S) = \operatorname{Span}(T') = \operatorname{Span}(T^*)$?

⊠

Basissen en Inverteerbare Matrices

Een snelle manier om verschillende basissen voor $\mathbb{R}^m$ te bekomen is de verzameling van de kolommen van een inverteerbare matrix te beschouwen.

Stelling 5.5 Kolommen van een Inverteerbare Matrix vormen een Basis

Stel dat A een vierkante matrix is van grootte m. Dan vormen de kolommen van A een basis voor $\mathbb{R}^m$ als en slechts als A inverteerbaar is.

Bewijs ($\Rightarrow$) Stel dat de kolommen van A een basis vormen voor $\mathbb{R}^m$. Dan zegt Definitie 5.2 dat de verzameling bestaande uit deze kolommen lineair onafhankelijk is. Wegens Stelling 3.16 is A dan inverteerbaar.

($\Leftarrow$) Stel dat A inverteerbaar is. Dan is deze verzameling wegens Stelling 3.16 lineair onafhankelijk. Diezelfde stelling zegt ook dat de kolommen van A dan een opspannende verzameling zijn. Als lineair onafhankelijke, opspannende verzameling komt A in aanmerking als basis voor $\mathbb{R}^m$ (Definitie 5.2). ■

Voorbeeld 5.7
Beschouw de 5×5 matrix

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 18 & 24 & 24 & -12 \\ 12 & -2 & -6 & 0 & -18 \\ -30 & -21 & -23 & -30 & 39 \\ 27 & 30 & 36 & 37 & -30 \\ 18 & 24 & 30 & 30 & -20 \end{bmatrix}$$

die rij-equivalent is met de 5×5 eenheidsmatrix I_5. Dus via Stelling 3.16 is A inverteerbaar. Dan zegt Stelling 5.5 dat de verzameling

$$\left\{ \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ -30 \\ 27 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ -2 \\ -21 \\ 30 \\ 24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 \\ -6 \\ -23 \\ 36 \\ 30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ -30 \\ 37 \\ 30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 \\ -18 \\ 39 \\ -30 \\ -20 \end{bmatrix} \right\}$$

een (andere) basis is voor $\mathbb{R}^5$. ⊠

We kunnen het feit dat de standaard eenheidsvectoren een basis vormen (Stelling 5.2) zien als niets meer of minder dan een rechtstreeks gevolg van Stelling 5.5.

Dimensie van een Deelruimte

Nu volgt een zeer eenvoudige definitie. Neem een basis en tel het aantal vectoren in die basis. Dat is de dimensie.

Definitie 5.3 Dimensie

Stel dat W een deelruimte van $\mathbb{R}^m$ en $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$ een basis voor W is. Dan wordt de **dimensie** van W gedefinieerd als $\dim(W) = n$.

Deze eenvoudige definitie heeft echter een inherent probleem. Voor een deelruimte kunnen jij en ik verschillende basissen construeren. Wat als jouw en mijn basis een verschillende dimensie hebben? We zouden dus kunnen concluderen dat het begrip dimensie niet goed gedefinieerd is. Gelukkig is er een stelling die dat probleem oplost.

Stelling 5.6 Basissen hebben dezelfde grootte

Stel dat W een deelruimte van $\mathbb{R}^m$ is, met een basis B en een tweede basis C. Dan hebben B en C dezelfde grootte.

Bewijs Een formeel bewijs van de stelling valt buiten het bestek van deze cursus. Probeer zelf verschillende basissen te construeren voor een bepaalde deelruimte, en toon aan dat elke basis evenveel vectoren heeft. ■

We sluiten deze sectie af met een eerder triviaal resultaat.

Stelling 5.7 Dimensie van $\mathbb{R}^m$

De dimensie van $\mathbb{R}^m$ is m.

Bewijs Stelling 5.2 voorziet ons van een basis die uit m vectoren bestaat. ■

Sectie 5.3 De Nulruimte van een Matrix

Onze discussie over deelruimten heeft als ultieme doel om een specifieke deelruimte wat meer in detail te bestuderen: de nulruimte van een matrix. De oplossingsverzameling van een homogeen stelsel (die als gevolg van Stelling 2.5 nooit ledig is) is, is voldoende interessant om een specifieke naam te verkrijgen. Dat is wat we nu zullen doen. We zullen de nulruimte echter niet definiëren als een eigenschap van het homogeen stelsel, maar als een eigenschap van de corresponderende coëfficiëntenmatrix.

Definitie 5.4 Nulruimte van een Matrix

De **nulruimte** van een matrix A, genoteerd als $\mathcal{N}(A)$, is de verzameling van alle vectoren die een oplossing zijn van het homogene stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$.

De nulruimte van een matrix kan gevonden worden door technieken die we eerder al hebben gezien. Hier zijn twee (klassieke) voorbeelden van de berekening van de nulruimte.

Voorbeeld 5.8
Laat ons de nulruimte van

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 9 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

berekenen, die we noteren als $\mathcal{N}(A)$. Als we Definitie 5.4 vertalen, wensen we enkel het homogeen stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ op te lossen. We rij-reduceren nu de uitgebreide matrix om

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

te bekomen. We kunnen het stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ herschrijven als

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_5 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 0\,. \end{aligned}$$

De variabelen x_3 en x_5 zijn vrij (omdat kolommen 1, 2 en 4 pivotkolommen zijn), dus herschikken we de vergelijkingen voorgesteld door de matrix in rij-gereduceerde echelonvorm tot

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_3 - x_5 \\ x_2 &= 3x_3 - 4x_5 \\ x_4 &= -2x_5\,. \end{aligned}$$

Dus kunnen we de oneindige oplossingsverzameling schrijven gebruikmakend van kolomvectoren.

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \middle| \; x_1 = -2x_3 - x_5, x_2 = 3x_3 - 4x_5, x_4 = -2x_5 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2x_3 - x_5 \\ 3x_3 - 4x_5 \\ x_3 \\ -2x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} \middle| \; x_3,\, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\boxtimes$

Voorbeeld 5.9
Laat ons de nulruimte van

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

berekenen, die we noteren als $\mathcal{N}(A)$. Als we Definitie 5.4 vertalen, wensen we enkel het homogeen stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ op te lossen. We rij-reduceren nu de uitgebreide matrix tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Er zijn geen vrije variabelen, dus het homogeen stelsel heeft enkel de triviale oplossing, de nulvector $\vec{\mathbf{0}}$. Zo kunnen we de (triviale) oplossingsverzameling schrijven als

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \vec{\mathbf{0}} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

⊠

De vorige voorbeelden geven aanleiding tot een weinig verrassende stelling. We zullen deze stelling formeel aantonen. Bemerk dat we hier $\mathbb{R}^n$ gebruiken in plaats van $\mathbb{R}^m$, omdat we hier de oplossingsverzameling bespreken van een homogeen stelsel met als geassocieerde matrix een $m \times n$ matrix.

Stelling 5.8 Nulruimte van een Matrix is een Deelruimte

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is. Dan is de nulruimte van A, $\mathcal{N}(A)$, een deelruimte van $\mathbb{R}^n$.

Bewijs We zullen de drie voorwaarden uit Definitie 5.1 controleren. Herinner je dat $\mathcal{N}(A) = \left\{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n \middle| A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}\right\}$. Ten eerste geldt $\vec{\boldsymbol{0}} \in \mathcal{N}(A)$, wat afgeleid kan worden als een gevolg van Stelling 2.5. Dus $\mathcal{N}(A) \neq \varnothing$.

Vervolgens controleren we of de nulruimte gesloten is onder de optelling door te veronderstellen dat $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{N}(A)$ en $\vec{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{N}(A)$. Dus we weten al iets over $\vec{\boldsymbol{x}}$ en $\vec{\boldsymbol{y}}$, nl. dat $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ en $A\vec{\boldsymbol{y}} = \vec{\boldsymbol{0}}$. De vraag is nu: is $\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{N}(A)$? We controleren dit als volgt.

$$\begin{aligned} A(\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}}) &= A\vec{\boldsymbol{x}} + A\vec{\boldsymbol{y}} && \text{Stelling 3.7} \\ &= \vec{\boldsymbol{0}} + \vec{\boldsymbol{0}} && \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{N}(A)\,,\ \vec{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{N}(A) \\ &= \vec{\boldsymbol{0}} && \text{Stelling 2.1} \end{aligned}$$

Dus inderdaad, $\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}}$ zit in de verzameling $\mathcal{N}(A)$.

Als laatste dienen we het gesloten zijn onder de scalaire vermenigvuldiging te controleren. Veronderstel daarvoor dat $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{N}(A)$. Dus we weten dat $\vec{\boldsymbol{x}}$ voldoet aan $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$. De vraag is of $\alpha\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{N}(A)$?

$$\begin{aligned} A(\alpha\vec{\boldsymbol{x}}) &= \alpha(A\vec{\boldsymbol{x}}) && \text{Stelling 3.7} \\ &= \alpha\vec{\boldsymbol{0}} && \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{N}(A) \\ &= \vec{\boldsymbol{0}} \end{aligned}$$

Dus $\alpha\vec{\boldsymbol{x}}$ is inderdaad een element van $\mathcal{N}(A)$.

Nu de drie voorwaarden uit Definitie 5.1 voldaan zijn, kunnen we met zekerheid zeggen dat de nulruimte van een matrix een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$. ■

Hieronder geven we een voorbeeld waar we Stelling 5.8 op kunnen toepassen.

Voorbeeld 5.10
Beschouw de deelverzameling $\mathbb{R}^5$ gegeven door

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 - 5x_5 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Het is mogelijk om aan te tonen dat W een deelruimte is van $\mathbb{R}^5$ door de drie voorwaarden uit Definitie 5.1 rechtstreeks te controleren, maar dit wordt snel zeer ingewikkeld. We kiezen er daarentegen voor om W vanuit een andere hoek te bekijken en bemerken dat het de verzameling is van oplossingen voor een homogeen stelsel vergelijkingen. Definieer de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & -6 & -5 \\ -2 & 4 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix},$$

en stel dan vast dat $W = \mathcal{N}(A)$. Door Stelling 5.8 zien we direct dat W een deelruimte is. ⊠

Een basis en de dimensie van de nulruimte kunnen ook gevonden worden via technieken die we al gezien hebben. We illustreren dit met een nieuw voorbeeld, waarbij we terug vanaf nul de redenering opbouwen.

Voorbeeld 5.11
We zijn op zoek naar de nulruimte van de matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Begin met het rij-reduceren van A. Het resultaat is

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Met $D = \{1, 2, 4\}$ en $F = \{3, 5\}$ herkennen we dat x_3 en x_5 vrije variabelen zijn in het stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$ en we elke niet-nulrij kunnen schrijven als een uitdrukking voor (respectievelijk) de afhankelijke variabelen x_1, x_2, x_4 in functie van de vrije variabelen x_3 en x_5. Hiermee kunnen we de vectorvorm van een oplossingsvector herschrijven als

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x_3 - 4x_5 \\ x_3 + 2x_5 \\ x_3 \\ -3x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Deze twee vectoren vormen eenvoudigweg een basis voor de nulruimte, omdat ze lineair onafhankelijk zijn en ze de nulruimte opspannen. We kunnen dus besluiten dat

$$\mathcal{N}(A) = \mathrm{Span}\left(\{\vec{z}_1, \vec{z}_2\}\right) = \mathrm{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Deze basis bevat twee vectoren, dus de dimensie van de nulruimte is in dit geval twee. ⊠

We sluiten de discussie over de nulruimte af met een stelling die evident lijkt als we het bovenstaande nogmaals bekijken.

Stelling 5.9 Dimension of the Null Space

De dimensie van de nulruimte van een matrix is gelijk aan het aantal pivotkolommen in de gereduceerde echelonvorm van die matrix.

Bewijs Een formeel bewijs van de stelling valt buiten het bestek van deze cursus. ■

Sectie 5.4 Coördinatenstelsels en Basisverandering

In deze sectie starten we met een stelling die een nieuwe definitie zal teweegbrengen. Meer bepaald bewijzen we dat elke vector van een deelruimte kan geschreven worden als een unieke lineaire combinatie van de verzameling basisvectoren. De coëfficiënten van deze unieke lineaire combinatie worden de coördinaten van een vector met betrekking tot die basis genoemd.

Stelling 5.10 Unieke Voorstelling

Stel dat $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_n\right\}$ een basis is voor deelruimte W, dan bestaan er voor elke $\vec{\boldsymbol{x}} \in W$ unieke getallen $c_1, \ldots, c_n$ zodat er geldt dat:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = c_1\vec{\boldsymbol{b}}_1 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{b}}_n.$$

Bewijs Beschouw een willekeurige maar vaste $\vec{\boldsymbol{x}} \in W$. $\mathcal{B}$ is een basis voor W, dus $\vec{\boldsymbol{x}}$ is een lineaire combinatie van de elementen van $\mathcal{B}$ met bepaalde coëfficiënten $c_1, \ldots, c_n$:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = c_1\vec{\boldsymbol{b}}_1 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{b}}_n.$$

Veronderstel dat de getallen $c_1, \ldots, c_n$ niet uniek zijn. Dat betekent dat er andere getallen $d_1, \ldots, d_n$ bestaan zodat:

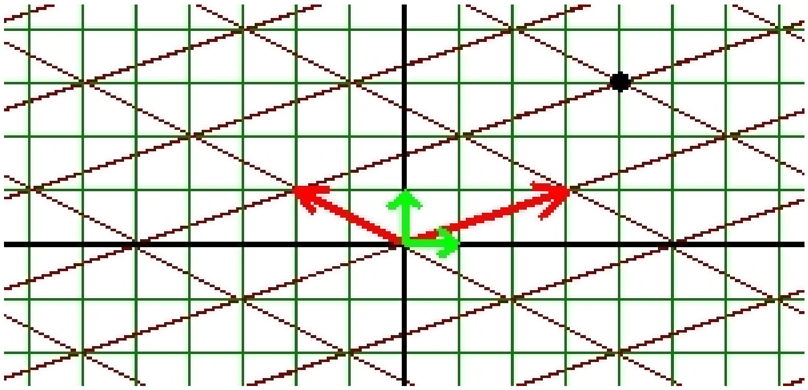
$$\vec{\boldsymbol{x}} = d_1\vec{\boldsymbol{b}}_1 + \cdots + d_n\vec{\boldsymbol{b}}_n.$$

Laat ons de twee voorstellingen op volgende manier combineren:

$$\vec{\boldsymbol{0}} = \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}} = (c_1 - d_1)\vec{\boldsymbol{b}}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\vec{\boldsymbol{b}}_n.$$

Omdat $\left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_n\right\}$ een lineair onafhankelijke verzameling is, moet gelden dat $c_i - d_i = 0$ voor alle i. Dit impliceert dat $c_i = d_i$ voor alle i. Dit is een contradictie, want dan zijn de getallen $d_1, \ldots, d_n$ niet verschillend van $c_1, \ldots, c_n$. Bijgevolg zijn $c_1, \ldots, c_n$ uniek en geldt het gestelde. ■

De voorstelling is uniek, dus verdient ze een aparte benaming.



Figuur 5.1: Twee verschillende coördinatenstelsels in $\mathbb{R}^2$. De standaardbasis voor $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven in het groen. Een tweede basis staat in het rood.

Definitie 5.5 Coördinaten m.b.t. een Basis

Stel dat $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_n\right\}$ een basis is voor een deelruimte W. De reële getallen $c_1, \ldots, c_n$ waarvoor

$$\vec{\boldsymbol{x}} = c_1\vec{\boldsymbol{b}}_1 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{b}}_n$$

worden de **coördinaten van $\vec{\boldsymbol{x}}$** m.b.t. de basis $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_n\right\}$ genoemd.

We gebruiken de volgende notatie: $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

Voorbeeld 5.12

Beschouw de twee basissen voorgesteld in Figuur 5.1. Enerzijds hebben we in het groen de standaardbasis $\mathcal{E} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2\}$ met

$$\vec{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad \vec{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Anderzijds hebben we in het rood een andere basis $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2\right\}$ met

$$\vec{\boldsymbol{b}}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad \vec{\boldsymbol{b}}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De coördinaten van het zwarte punt $\vec{\boldsymbol{x}}$ in de figuur t.o.v. de groene, respectievelijk de rode basis, zijn

$$[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

We stellen een interessante link vast tussen de twee coördinaatvectoren. Omdat

$$2\vec{\boldsymbol{b}}_1 + 1\vec{\boldsymbol{b}}_2 = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{E}}$$

bekomen we in matrixnotatie:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{E}}\,.$$

De 2×2 matrix die we hebben opgesteld bevat de basisvectoren $\vec{\boldsymbol{b}}_1$ en $\vec{\boldsymbol{b}}_2$ als kolommen. ⊠

De matrix die we geconstrueerd hebben in het laatste voorbeeld verschaft ons een belangrijk inzicht. Door de basisvectoren van de basis $\mathcal{B}$ als kolommen in een matrix te plaatsen, kunnen we de ene basis in de andere omzetten. We hebben dit expliciet gedaan voor de beschouwde vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ hierboven, maar we zouden eender welke vector in $\mathbb{R}^2$ kunnen gekozen hebben. Deze vector vermenigvuldigen met de speciale matrix zou de coördinaten m.b.t. de standaardbasis voortbrengen uit de coördinaten m.b.t. de basis $\mathcal{B}$. Omdat deze unieke matrix zo speciaal is, krijgt die een speciale naam: matrix voor basisverandering. We geven onmiddellijk een algemene definitie voor $\mathbb{R}^m$.

Definitie 5.6 Matrix voor Basisverandering

Stel dat $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_m\right\}$ een basis is voor $\mathbb{R}^m$. De **matrix voor basisverandering** $P_{\mathcal{B}}$ is een $m \times m$ matrix waarvan de kolommen de vectoren $\vec{\boldsymbol{b}}_1$, $\vec{\boldsymbol{b}}_2$, $\vec{\boldsymbol{b}}_3$, …, $\vec{\boldsymbol{b}}_m$ zijn.

Uit de Inverteerbare Matrix Stelling (Stelling 3.16) volgt direct dat $P_{\mathcal{B}}$ inverteerbaar is, omdat de kolommen basisvectoren zijn en daardoor in het bijzonder lineair onafhankelijk zijn. Bijgevolg is een verandering van basis een omkeerbare bewerking.

Stelling 5.11 Verandering van Basis

Stel dat $\mathcal{E} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_m\}$ de standaardbasis is in $\mathbb{R}^m$, en $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_m\right\}$ een andere basis is in $\mathbb{R}^m$, dan geldt voor alle $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^m$ dat

$$P_{\mathcal{B}}\,[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{E}} \qquad \text{en} \qquad P_{\mathcal{B}}^{-1}\,[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{E}} = [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}}\,.$$

Bewijs Een formeel bewijs van de stelling valt buiten het bestek van deze cursus, maar de voorbeelden die we zullen behandelen maken duidelijk dat de stelling daadwerkelijk zal gelden. ■

Voorbeeld 5.13

We gaan verder op Voorbeeld 5.12 en bekomen

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

We kunnen de inverse berekenen:

$$P_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}.$$

Wanneer we opnieuw de vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ uit Figuur 5.1 nemen, kunnen we de coördinaten m.b.t. $\mathcal{B}$ vinden uit de coördinaten m.b.t. de standaardbasis:

$$\begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix} [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{E}} = [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}}\,.$$

Deze inverse transformatie zal zeer nuttig blijken. ⊠

Sectie 5.5 Voorbereidende Oefeningen

1. Bepaal de dimensie van de deelruimte H van $\mathbb{R}^3$, opgespannen door de vectoren

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{v}}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

2. Beschouw de basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

in $\mathbb{R}^2$. Als $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, wat is $\vec{\boldsymbol{x}}$ dan?

3. Kan $\mathbb{R}^3$ een vier-dimensionale deelruimte bevatten? Leg uit.

4. Stel

$$\vec{\boldsymbol{b}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{b}}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{b}}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Toon aan dat de vezameling $\mathcal{B} = \left\{ \vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}_3 \right\}$ een basis is van $\mathbb{R}^3$.

   (b) Vind de coördinatentransformatie van basis $\mathcal{B}$ naar de standaardbasis.

   (c) Schrijf de vergelijking die $\vec{\boldsymbol{x}}$ uit $\mathbb{R}^3$ in verband brengt met $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}}$.

   (d) Vind $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}}$ voor de $\vec{\boldsymbol{x}}$ die hierboven gegeven is.

5. Stel dat

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ en } \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

   Bepaal of $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ een basis is voor $\mathbb{R}^3$. Is $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ een basis voor $\mathbb{R}^2$?

6. Stel $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, en $H = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} : s \text{ in } \mathbb{R} \right\}$. Dan is elke vector in H een lineaire combinatie van $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ wegens

$$\begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Is $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ een basis voor H?

Hoofdstuk 6
Determinanten

De determinant is een functie die een vierkante matrix als argument neemt en een scalair teruggeeft. In tegenstelling tot een vectorruimte is dit dus geen algebraïsche structuur. Een determinant heeft echter vele behulpzame eigenschappen voor het bestuderen van vectorruimten, matrices en stelsels vergelijkingen, dus kunnen we er moelijk omheen (alhoewel sommigen het hebben geprobeerd). De eigenschappen van een determinant komen vaak van pas, maar ze aantonen kan bij momenten wel moeilijk zijn.

Sectie 6.1 Determinant van een Matrix

Laten we starten met de definitie van een determinant en enkele inleidende berekeningen. De definitie van de determinantfunctie is **recursief**. Dat wil zeggen dat de determinant van een grote matrix gedefinieerd wordt in functie van de determinant van kleinere matrices.

Definitie 6.1 Deelmatrix

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is. Dan is de **deelmatrix** $A\,(i|j)$ de $(m-1) \times (n-1)$ matrix bekomen door uit A rij i en kolom j te verwijderen.

Voorbeeld 6.1
Voor de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

hebben we de deelmatrices

$$A\,(2|3) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad A\,(3|1) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 9 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

⊠

Definitie 6.2 Determinant van een Matrix

Veronderstel dat A een vierkante matrix is, dan is zijn **determinant**, $\det(A) = |A|$, een element uit $\mathbb{R}$, recursief gedefinieerd als volgt.

Als A een 1×1 matrix is, stel $A = [a]$, dan $\det(A) = a$.

Als A een 2×2 matrix is, stel $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dan is $\det(A) = ad - bc$.

Als A een matrix van grootte n is met $n > 2$, dan is

$$\begin{aligned}\det(A) &= [A]_{11} \det(A(1|1)) - [A]_{12} \det(A(1|2)) + [A]_{13} \det(A(1|3)) - \\ &\quad [A]_{14} \det(A(1|4)) + \cdots + (-1)^{1+n} [A]_{1n} \det(A(1|n)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} [A]_{1i} \det(A(1|i)) .\end{aligned}$$

Bemerk dat we de uitdrukking $ad - bc$ al eerder zijn tegengekomen in Stelling 3.9.

Om de determinant te berekenen voor een 5×5 matrix, dienen we 5 deelmatrices op te bouwen, elk van grootte 4. Vervolgens, om de determinanten te berekenen van elk van deze 4×4 matrices, moeten we voor elk 4 deelmatrices opbouwen, nu van grootte 3, en zo verder. De determinant berekenen van een 10×10 matrix vereist bijgevolg $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 3628800$ determinanten van 1×1 matrices. Er bestaan echter efficiëntere procedures om een determinant te berekenen, en deze procedures zullen weldra aan bod komen. We berekenen hier eerst op de naieve manier de determinant van een matrix van een nog hanteerbare grootte.

Voorbeeld 6.2

Veronderstel dat we over een 3×3 matrix beschikken:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Dan is

$$\begin{aligned}\det(A) = |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3\,[1(2) - 6(-1)] - 2\,[4(2) - 6(-3)] - [4(-1) - 1(-3)] \\ &= 24 - 52 + 1 \\ &= -27 .\end{aligned}$$

⊠

Indien je andere bronnen raadpleegt bij het bestuderen van determinanten, kan je termen tegenkomen zoals “minor” en “cofactor”, vooral wanneer het gaat over de ontwikkeling naar rijen en kolommen (zie hieronder). We hebben ervoor gekozen om deze definities niet te formaliseren, omdat we ook perfect zonder kunnen. Op informele wijze geven we echter mee dat een **minor** de determinant is van een deelmatrix, meerbepaald $\det(A(i|j))$, en meestal wordt aangeduid als de minor van $[A]_{ij}$. Een

cofactor is een minor met een teken. Zo is de cofactor van $[A]_{ij}$ gelijk aan $(-1)^{i+j} \det(A(i|j))$. De cofactor van $[A]_{ij}$ zal genoteerd worden door C_{ij}.

Determinanten Berekenen

Hier volgt een eerste eigenschap van determinanten. Deze eigenschap zal zeer nuttig blijken bij berekeningen met pen en papier.

Stelling 6.1 Determinantontwikkeling naar Rijen

Veronderstel dat A een vierkante matrix van grootte n is. Dan is

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{i+1}[A]_{i1} \det(A(i|1)) + (-1)^{i+2}[A]_{i2} \det(A(i|2)) \\ &\quad + (-1)^{i+3}[A]_{i3} \det(A(i|3)) + \cdots + (-1)^{i+n}[A]_{in} \det(A(i|n)), \qquad 1 \leq i \leq n \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}[A]_{ij} \det(A(i|j)), \qquad 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

wat gekend staat als de **ontwikkeling naar rij** i.

Bewijs Een formeel bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. ■

We kunnen eveneens een formule bekomen die de determinant berekent door te ontwikkelen naar een kolom, maar dit zal eenvoudiger zijn als we eerst een resultaat aantonen over de interactie tussen determinanten en hun getransponeerde. Bemerk dat het volgende bewijs gebruik maakt van de mogelijkheid om een determinant te berekenen door te ontwikkelen naar een *vrij te kiezen* rij.

Stelling 6.2 Determinant van de Getransponeerde

Veronderstel dat A een vierkante matrix is. Dan is $\det\left(A^T\right) = \det(A)$.

Bewijs Een formeel bewijs valt buiten het bestek van deze cursus. ■

Nu kunnen we eenvoudig bekomen dat een determinant berekend kan worden via ontwikkeling naar eender welke kolom.

Stelling 6.3 Determinantontwikkeling naar Kolommen

Veronderstel dat A een vierkante matrix van grootte n is. Dan is

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+j}[A]_{1j} \det(A(1|j)) + (-1)^{2+j}[A]_{2j} \det(A(2|j)) \\ &\quad + (-1)^{3+j}[A]_{3j} \det(A(3|j)) + \cdots + (-1)^{n+j}[A]_{nj} \det(A(n|j)) \qquad 1 \leq j \leq n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}[A]_{ij} \det(A(i|j)) \qquad 1 \leq j \leq n,\end{aligned}$$

wat de **ontwikkeling naar kolom** j wordt genoemd.

Bewijs

$$\det(A) = \det\left(A^T\right) \qquad \text{Stelling 6.2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} \left[A^T\right]_{ji} \det\left(A^T(j|i)\right) && \text{Stelling 6.1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} \left[A^T\right]_{ji} \det\left((A(i|j))^T\right) && \text{Definitie 3.4} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} \left[A^T\right]_{ji} \det\left(A(i|j)\right) && \text{Stelling 6.2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \left[A\right]_{ij} \det\left(A(i|j)\right) && \text{Definitie 3.4}
\end{aligned}
$$

■

Dat de determinant van een $n \times n$ matrix berekend kan worden op $2n$ verschillende (maar gelijkaardige) manieren is opmerkelijk. Voor diegenen die hier nog aan zouden twijfelen, behandelen we een voorbeeld waarbij we een 4×4 matrix op twee verschillende manieren berekenen.

Voorbeeld 6.3
Stel

$$
A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.
$$

Ontwikkelen naar de vierde rij (Stelling 6.1 met $i = 4$) geeft:

$$
\begin{aligned}
|A| = (4)(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\
+ (2)(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + (6)(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 9 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\
= (-4)(10) + (1)(-22) + (-2)(61) + 6(46) = 92\,,
\end{aligned}
$$

terwijl het ontwikkelen naar kolom 3 (Stelling 6.3 met $j = 3$) het volgende oplevert:

$$
\begin{aligned}
|A| = (0)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} + \\
(-2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\
= 0 + 0 + (-2)(-107) + (-2)(61) = 92\,.
\end{aligned}
$$

Merk op hoeveel gemakkelijker de tweede berekening was. Door ervoor te kiezen om naar de derde kolom te ontwikkelen, hebben we twee elementen die nul zijn, dus twee 3×3 determinanten moesten al niet meer berekend worden! ⊠

We definiëren een **benedendriehoeksmatrix** als een matrix die boven de hoofddiagonaal enkel nullen heeft, en een **bovendriehoeksmatrix** als een matrix die onder de hoofddiagonaal enkel nullen heeft. Voor zulke matrices kan men de nullen uitbuiten door te ontwikkelen naar de gepaste rij of kolom, wat de berekening van de determinant significant vereenvoudigt.

Voorbeeld 6.4
Veronderstel dat

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

We zullen de determinant van deze 5×5 matrix berekenen door consistent te ontwikkelen naar de eeste kolom van elke deelmatrix die we tegenkomen. In de eerste kolom is er slechts één element verschillend van nul en enkel dit niet-nul element dient verder onderzocht te worden.

$$\begin{aligned} \det(T) &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1)(3)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1)(3)(-1)(5) = 30 \end{aligned}$$

⊠

Het voorgaande voorbeeld illustreert een eenvoudige stelling die zeer goed van pas komt bij het berekenen van determinanten.

Stelling 6.4 Determinant van een driehoeksmatrix

De determinant van een driehoeksmatrix kan berekend worden door de elementen op de hoofddiagonaal van de matrix te vermenigvuldigen.

Bewijs Een formeel bewijs voor deze stelling neerschrijven is niet bijzonder moeilijk, maar in feite volstaat het voorgaande voorbeeld om te zien waarom de stelling geldt. ■

Sectie 6.2 Eigenschappen van Determinanten van Matrices

We hebben gezien hoe we de determinant van een matrix kunnen berekenen en het opmerkelijke feit dat we kunnen ontwikkelen naar *eender welke* rij *of* kolom voor deze berekening. In deze uiterst theoretische sectie zullen we enkele intrigerende eigenschappen van determinanten voorstellen en bewijzen. We zullen zien hoe de waarde van een determinant ons zal toelaten om inzicht te krijgen in de verschillende eigenschappen van een vierkante matrix.

Determinanten en Rijbewerkingen

De eerste stelling is eigenlijk het belangrijkste resultaat uit deze sectie, omdat de stelling bijzonder handig zal blijken wanneer we determinanten met de hand zullen uitrekenen.

Stelling 6.5 Determinant na Rij- en Kolombewerkingen

Veronderstel dat A een vierkante matrix is. Dan gelden de volgende eigenschappen.

a. **Rij-/Kolomwissel:** Stel dat B de vierkante matrix is bekomen door in A de locatie van twee rijen, of twee kolommen, om te wisselen. Dan geldt dat $\det(B) = -\det(A)$.

b. **Rij-/Kolomvermenigvuldiging:** Stel dat B de vierkante matrix is bekomen door in A een enkele rij te vermenigvuldigen met een scalair α, of door een enkele kolom te vermenigvuldigen met een scalair α. Dan geldt $\det(B) = \alpha \det(A)$.

c. **Substitutie:** Stel dat B de vierkante matrix is bekomen door in A een enkele rij te vermenigvuldigen met een scalair α en op te tellen bij een andere rij, of door een enkele kolom te vermenigvuldigen met een scalair α en op te tellen bij een andere kolom. Dan geldt dat $\det(B) = \det(A)$.

Bewijs Een formeel bewijs valt buiten het bestek van deze cursus. ∎

Is dit wat je verwacht had? We zouden kunnen argumenteren dat de derde rijbewerking de meest populaire is, en toch heeft deze geen enkel effect op de determinant! We kunnen dit gegeven, alsook ons inzicht in de andere twee rijbewerkingen, uitbuiten om een andere manier voor het berekenen van de determinant te formuleren. We illustreren dit binnen de context van een voorbeeld.

Voorbeeld 6.5
Veronderstel dat we de determinant van een 4×4 matrix willen berekenen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

We voeren een reeks rijbewerkingen uit op deze matrix, waarbij we naar een bovendriehoeksmatrix streven, waarvan de determinant eenvoudig het product is van de elementen op de hoofddiagonaal. Voor elke rijbewerking volgen we de effecten op de determinant op via Stelling 6.5.

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = -\det(A_1)$$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad = -\det(A_2)$$

$$\xrightarrow{R_3+1R_1} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad = -\det(A_3)$$

$$\xrightarrow{R_4-3R_1} A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad = -\det(A_4)$$

$$\xrightarrow{R_2+1R_3} A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad = -\det(A_5)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad = 2\det(A_6)$$

$$\xrightarrow{R_3-4R_2} A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad = 2\det(A_7)$$

$$\xrightarrow{R_4+4R_2} A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -11 \end{bmatrix} \qquad = 2\det(A_8)$$

$$\xrightarrow{R_4-1R_3} A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \end{bmatrix} \qquad = 2\det(A_9)$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_4} A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \end{bmatrix} \qquad = 2\det(A_{10})$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \qquad = -2\det(A_{11})$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{55}R_4} A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad = -110\det(A_{12})$$

De matrix A_{12} is een bovendriehoeksmatrix, dus de ontwikkeling (herhaaldelijk) naar de eerste kolom resulteert in $\det(A_{12}) = (1)(1)(1)(1) = 1$ (zie Voorbeeld 6.4) en dus geldt dat $\det(A) = -110(1) = -110$.

Bemerk dat onze reeks rijbewerkingen ietwat *ad hoc* was, alsook de transformatie naar A_5. We hadden nog meer methodologisch te werk kunnen gaan en strict het proces volgen dat een matrix omzet naar rij-gereduceerde echelonvorm (Stelling 1.3), waarbij we mogelijks hetzelfde numerieke resultaat zouden bekomen met als laatste matrix de 4×4 eenheidsmatrix. Bemerk dat we konden stoppen bij A_8, omdat we op dat punt $\det(A_8)$ konden berekenen door twee ontwikkelingen naar de eerste kolom, gevolgd door een eenvoudige determinant van een 2×2 matrix.

De schoonheid van deze aanpak schuilt in het feit dat we computationeel al een procedure hebben neergeschreven die matrices omzet naar rij-gereduceerde echelonvorm, dus alles wat we moeten doen is de multiplicatieve veranderingen in de determinant opvolgen naarmate het algoritme verdergaat. Overigens vereiste deze aanpak voor een vierkante matrix van grootte n een grootorde van n^3 vermenigvuldigingen, terwijl de recursieve aanpak van ontwikkelen naar een rij of kolom (Stelling 6.1, Stelling 6.3) een grootorde van ongeveer $(n-1)(n!)$ vermenigvuldigingen vereist. Dus zelfs voor kleine matrices zal de computationele aanpak via rijbewerkingen een significant betere verwerkingstijd kunnen voorleggen. Het opvolgen en controleren van de effecten van afrondingsfouten is dan weer een ander verhaal, wat we best overlaten aan een cursus numerieke lineaire algebra. ⊠

We gaan vervolgens verder met een voordehandliggende stelling waarvan het bewijs de stijl van de daaropvolgende bewijzen in deze sectie al uitstalt.

Stelling 6.6 Determinant van een Matrix met een Nulrij of -kolom

Veronderstel dat A een vierkante matrix is met een rij waarvan elk element nul is, of een kolom waar elk element nul is. Dan is $\det(A) = 0$.

Bewijs

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n en rij i voor elk element een nul heeft. We berekenen $\det(A)$ via ontwikkeling naar rij i.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ij} \det(A(i|j)) && \text{Stelling 6.1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, 0 \det(A(i|j)) && \text{Rij } i \text{ bevat enkel nullen} \\
&= \sum_{j=1}^{n} 0 = 0
\end{aligned}
$$

Het bewijs voor het geval van een nulkolom is volledig analoog, of kan afgeleid worden uit een toepassing van Stelling 6.2 waarbij we beroep doen op de getransponeerde van een matrix. ∎

Determinanten, Inverteerbare Matrices, Matrixvermenigvuldiging

Als je iemand met redelijk wat ervaring met matrices zou vragen naar het praktisch gebruik van de determinant, dan zou hij/zij waarschijnlijk de volgende stelling vermelden als het eerste wat in hem/haar opkomt.

Stelling 6.7 Inverteerbare Matrices hebben Niet-Nul Determinanten

Stel dat A een vierkante matrix is. Dan is A inverteerbaar als en slechts als $\det(A) \neq 0$.

Bewijs Een informeel bewijs volgt direct uit het toepassen van een aantal van de voorgaande stellingen. Deze stellingen beschrijven in essentie wat er gebeurt wanneer men elementaire rijbewerkingen gebruikt om de matrix om te vormen tot een nieuwe matrix. Een matrix is inverteerbaar als het een pivotelement heeft in elk van de rijen en kolommen. Dit kan enkel voorkomen als de determinant niet nul is, want de determinant wordt enkel vermenigvuldigd met een niet-nul getal bij het uitvoeren van elementaire rijbewerkingen op de matrix. Dus de determinant blijft nul als ze al nul was, en ze blijft niet-nul als ze al niet-nul was. ■

Voor het geval van 2×2 matrices kan je de toepassing van Stelling 6.7 vergelijken met de combinatie van wat behandeld wordt in Definitie 6.2 en Stelling 3.9.

Omdat Stelling 6.7 een equivalentie is, kunnen we onze steeds groter wordende lijst van equivalenties voor inverteerbare matrices verder aanvullen. De oplijsting van de conditie $\det(A) \neq 0$ is één van de beste motivaties om te leren over determinanten. De volgende stelling benadrukt hoe elegant matrixvermenigvuldiging en determinanten met elkaar interageren.

Stelling 6.8 Determinant van een Product van Matrices

Veronderstel dat A en B vierkante matrices zijn van dezelfde grootte. Dan geldt dat $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Bewijs Een formeel bewijs valt buiten het bestek van deze cursus. ■

Het is prachtig dat determinanten en matrixvermenigvuldiging zo met elkaar kunnen interageren. Geldt dit ook voor $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$?

Som van Determinanten

De laatste stelling in deze sectie is een specifiek resultaat met betrekking tot de som van twee determinanten.

Stelling 6.9 Som van Determinanten

Stel dat A, B en C $n\times n$ matrices zijn met identieke elementen op één rij of kolom na. Stel verder dat, voor elke rij of kolom, elk element in A de som is van de corresponderende elementen in B en C. Dan geldt er dat $\det(A) = \det(B) + \det(C)$.

Bewijs We geven het bewijs voor een $n\times n$ matrix waar de eerste kolom in A de som is van de eerste kolommen in B en C. We moeten aantonen dat

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21}+c_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}+c_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ c_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \det(B) + \det(C)\ .\end{aligned}$$

We kunnen simpelweg de determinant aan de linkerkant berekenen via ontwikkeling naar de eerste kolom.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= (b_{11}+c_{11})\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - (b_{21}+c_{21})\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\qquad + \cdots + (-1)^{n+1}(b_{n1}+c_{n1})\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} & \end{vmatrix} \\
&= b_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - b_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\qquad + \cdots + (-1)^{n+1}b_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} & \end{vmatrix} \\
&+ c_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - c_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\qquad + \cdots + (-1)^{n+1}c_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} & \end{vmatrix} \\
&= \det(B) + \det(C)\ .
\end{aligned}
$$

Andere gevallen kunnen op een analoge manier bewezen worden. ■

Sectie 6.3 Voorbereidende Oefeningen

1. Bereken
$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

2. Bereken
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ -3 & 10 & -6 & 8 \end{vmatrix}$$
in zo weinig mogelijk stappen.

3. Gebruik een determinant om te bepalen of $\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_3$ lineair afhankelijk zijn, gegeven dat
$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ en } \vec{\boldsymbol{v}}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$